Espacios topológicos

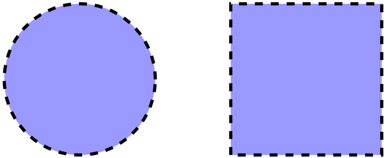
Una **topología** sobre un conjunto X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tal que:

i) $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{T}$.

ii) La unión de los elementos de cualquier subfamilia de $\mathcal{T}$ esta en $\mathcal{T}$.

iii) La intersección de los elementos de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Un **espacio topológico** es un par $(X, \mathcal{T})$, formado por un subconjunto X y una topología $\mathcal{T}$ sobre X. A los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama **subconjuntos abiertos**.



Un par de subconjuntos abiertos $\mathbb{R}^2$ con la topología usual (ver p.2)

Topología usual en $\mathbb{R}$

Sea $A \subset \mathbb{R}$. La **topología usual** en $\mathbb{R}$ es

$$\mathcal{T}_u = \{A \subset \mathbb{R} \mid \text{ para todo } x \in A \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A\}.$$

Demostración de que $\mathcal{T}_u$ es topología. a) Es inmediato que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_u$.
b) Sea $\{A_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}_u$. Sea $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$.
Como $A_{i_0} \in \mathcal{T}_u$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A_{i_0}$.
Entonces $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Por tanto $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_u$.
c) Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{T}_u$. Sea $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$.
Entonces $x \in A_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, como $A_i \in \mathcal{T}_u$, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $(x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i) \subset A_i$.
Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$. Entonces $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$. Por tanto $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}_u$.

Ejercicio 1. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos en $\mathcal{T}_u$?

a) $A_1 = \{0\}$ **b)** $A_2 = (a, b)$ **c)** $A_3 = [a, b]$

d) $A_4 = (a, b]$, $a < b$ **e)** $A_5 = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right]$ **f)** $A_6 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

Solución. A_2 y A_5.

Topología usual en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, la bola euclidea de centro $\mathbf{x}$ y radio ε es el conjunto

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon\},$$

donde, si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

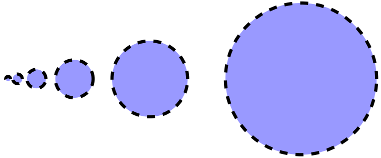
Sea $A \subset \mathbb{R}$. La **topología usual** en $\mathbb{R}^n$ es

$$\mathcal{T}_u = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid \text{ para todo } x \in A \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset A\}.$$

Si $A \in \mathcal{T}$, se dice que A es abierto en la topología usual.

Observación. la demostración de que $\mathcal{T}_u$ es una topología es exactamente igual que para $\mathbb{R}$ reemplazando $(x - \varepsilon, x - \varepsilon)$ por $B_\varepsilon(x)$.

Ejemplo. Un subconjunto abierto de la topología usual en $\mathbb{R}^2$:



Conjuntos cerrados

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es **cerrado** si el conjunto $X \setminus A$ es abierto.

Ejemplos. El subconjunto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es cerrado con la topología usual porque su complementario $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ es abierto. Análogamente, $[a, +\infty)$ es cerrado, porque su complementario $(-\infty, a)$ es abierto. El subconjunto $[a, b)$ de $\mathbb{R}$ no es abierto ni cerrado.

Propiedades. Sea X un espacio topológico. Entonces:

a) $\emptyset$ y X son cerrados.
b) Las intersecciones arbitrarias de subconjuntos cerrados son cerradas.
c) Las uniones finitas de subconjuntos cerrados son cerradas.

Demostración. a) X y $\emptyset$ son cerrados porque sus complementarios, $\emptyset$ y X, son abiertos.
b) Dada una familia de subconjuntos cerrados $\{A_i \mid i \in I\}$, aplicando las leyes de De Morgan, se tiene que $X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I}(X \setminus A_i)$ que es abierto por serlo cada $X \setminus A_i$. Luego $\bigcap_{i \in I} A_i$ es cerrado.
c) Dada una familia de subconjuntos cerrados $\{A_1, A_2, \dots A_n\}$, aplicando las leyes de De Morgan, se tiene que $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i)$ que es abierto por serlo cada $X \setminus A_i$. Luego $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es cerrado.

Topologías básicas en cualquier conjunto

Si X es un conjunto cualquiera:
a) $\mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X)$ es la **topología discreta** en X.
b) $\mathcal{T}_T = \{\emptyset, X\}$ es la **topología trivial** en X.
c) $\mathcal{T}_{CF} = \{U \subset X \mid |X \setminus U| \text{ finito}\} \cup \emptyset$ es la topología de los **complementos finitos**.
d) $\mathcal{T}_{CN} = \{U \subset X \mid |X \setminus U| \text{ finito o numerable}\} \cup \emptyset$ es la **topología de los complementos numerables**. en X.

Ejercicio 2. Demuestra que todas las anteriores son topologías en X.
Solución. **a)** y **b)** son trivialmente topologías.
Para **c)**, es claro que $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{CF}$, Por otra parte, si $\{A_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}_{CF} \Rightarrow |X \setminus A_i|$ es finito para todo $i \in I \Rightarrow |X \setminus (\bigcup_{i\in I} A_i)| = |\bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i)|$ es finito $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_{CF}$.
Finalmente, si $\{A_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathcal{T}_{CF} \Rightarrow |X \setminus A_i|$ es finito para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Rightarrow |X \setminus (\bigcap_{i=1}^n A_i)| = |\bigcup_{i=1}^n (X \setminus A_i)|$ es finito $\Rightarrow \bigcap_{i1}^n A_i \in \mathcal{T}_{CF}$.
Para **d)**, es claro que $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{CN}$, Por otra parte, si $\{A_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}_{CN} \Rightarrow |X \setminus A_i|$ es finito o numerable para todo $i \in I \Rightarrow |X \setminus (\bigcup_{i\in I} A_i)| = |\bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i)|$ es finito o numerable $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_{CN}$.
Finalmente, si $\{A_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathcal{T}_{CN} \Rightarrow |X \setminus A_i|$ es finito o numerable para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Rightarrow |X \setminus (\bigcap_{i=1}^n A_i)| = |\bigcup_{i=1}^n (X \setminus A_i)|$ es finito o numerable $\Rightarrow \bigcap_{i1}^n A_i \in \mathcal{T}_{CN}$.

Ejercicios

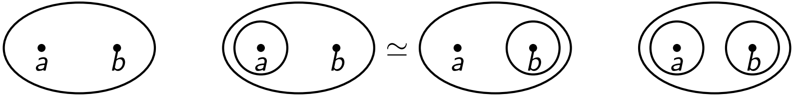
Ejercicio 3. Encuentra todas las topologías en un conjunto con:
a) 1 elemento, **b)** 2 elementos, **c)** 3 elementos,

Solución. **a)** Si $X = \{a\}$ hay una única topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}\} = \mathcal{T}_T = \mathcal{T}_D$.
b) Si $X = \{a, b\}$ hay 4 topologías (3 de ellas esencialmente distintas):
$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a, b\}\} = \mathcal{T}_T$,
$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ (análoga a $\mathcal{T}'_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$),
$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = \mathcal{T}_D$.

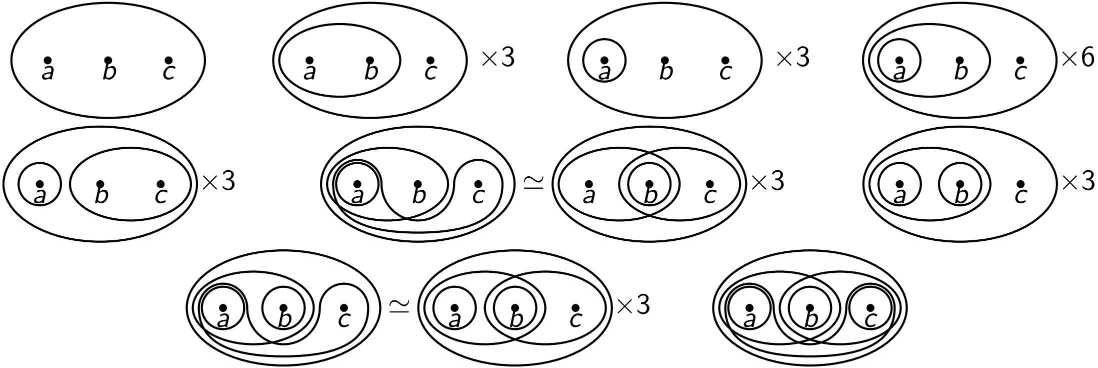
c) Si $X = \{a, b, c\}$... hay 9 topologías posibles esencialmente distintas:
$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a, b, c\}\} = \mathcal{T}_T$,
$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, y otras dos análogas
$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$, y otras dos análogas
$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, y otras cinco análogas
$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$,
$\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$, y otras dos análogas
$\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, y otras dos análogas
$\mathcal{T}_8 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$, y otras cinco análogas
$\mathcal{T}_9 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} = \mathcal{T}_D$.

Ejercicios

Solución del ejercicio 3 (cont.). Topologías en un conjunto con 2 elementos:



Topologías esencialmente distintas en un conjunto con 3 elementos:



Ejercicio 4. $\mathcal{T}$ es la topología discreta en $X \Leftrightarrow \{p\}$ es un conjunto abierto, $\forall p \in X$.

Solución. $\Rightarrow$) Inmediato.

$\Leftarrow$) Sea $U \subset X \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \in \mathcal{T}$ por ser unión de abiertos de $\mathcal{T}$.

Ejercicios de topologías

Ejercicio 5. Sea X un conjunto y sea $a \in X$. Estudiar si son topologías en X:
a) $\mathcal{T}_a = \{U \subset X \mid a \in U\} \cup \emptyset$. **b)** $\mathcal{T}'_a = \{U \subset X \mid a \notin U\} \cup X$.

Observación previa: Es inmediato que, para ver si $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ es una topología, basta comprobar: **i)** $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
ii) Si $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}, U_i \neq X, \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.
iii) Si $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{T}, U_i \neq X, \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Solución: a) $\mathcal{T}_a = \{U \subset X \mid a \in U\} \cup \emptyset$ es topología pues:
- **i)** $\emptyset \in \mathcal{T}_a$ por definición de $\mathcal{T}_a$, y $X \in \mathcal{T}_a$, pues $a \in X$.
- **ii)** Si $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}_a, U_i \neq X, \emptyset \Rightarrow a \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow a \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_a$.
- **iii)** Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{T}_a, U_i \neq X, \emptyset \Rightarrow a \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow a \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_a$.

b) $\mathcal{T}'_a = \{U \subset X \mid a \notin U\} \cup X$ es topología pues:
- **i)** $X \in \mathcal{T}'_a$ por definición de $\mathcal{T}'_a$, y $\emptyset \in \mathcal{T}'_a$, pues $a \notin \emptyset$.
- **ii)** Si $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}'_a, U_i \neq X, \emptyset \Rightarrow a \notin U_i, \forall i \in I \Rightarrow a \notin \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}'_a$.
- **iii)** Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{T}'_a, U_i \neq X, \emptyset \Rightarrow a \notin U_i, \forall i \in I \Rightarrow a \notin \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}'_a$.

Ejercicios de topologías

Ejercicio 6. Sea X un conjunto y sea $a \in X$. Estudiar si son topologías en X:
c) $\mathcal{T}''_a = \mathcal{T}'_a \cup \{U \subset X \mid a \in U, X \setminus U \text{ finito}\}$. **d)** $\mathcal{T}_\infty = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ infinito}\} \cup \emptyset \cup X$.

Solución: c) $\mathcal{T}''_a = \{U \subset X \mid a \notin U\} \cup \{U \subset X \mid a \in U \text{ y } X \setminus U \text{ finito}\} \cup X$ es topología:

i) $X \in \mathcal{T}''_a$ por definición de $\mathcal{T}''_a$, y $\emptyset \in \mathcal{T}''_a$, pues $a \notin \emptyset$.

ii) Sea $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}, U_i \neq X, \emptyset$.
- Si para todo $i \in I$, $a \notin U_i \Rightarrow a \notin \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}''_a$.
- En otro caso, existe i_0 tal que $a \in U_{i_0}$ y $X \setminus U_{i_0}$ es finito $\Rightarrow a \in \bigcup_{i\in I} U_i$ y $X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i \subset X \setminus U_{i_0} \Rightarrow X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$ es finito o vacío $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}''_a$.

iii) Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{T}''_a$.
- Si para algún i, $a \notin U_i \Rightarrow a \notin \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}''_a$.
- En otro caso, $a \in U_i$ para todo i, y $X \setminus U_i$ es finito, para todo $i \Rightarrow a \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ y $X \setminus (\bigcap_{i=1}^n U_i)$ es finito (pues $X \setminus (\bigcap_{i=1}^n U_i) = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i)) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}''_a$.

d) $\mathcal{T}_\infty = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ infinito }\} \cup \emptyset \cup X$ es topología si X es un conjunto finito, pues en ese caso coincide con la topología trivial.
Si X es infinito no es topología pues no cumple (ii).
Para verlo basta considerar un punto $x_0 \in X$. Entonces para todo $x \neq x_0$ el conjunto $\{x\} \in \mathcal{T}_\infty$ pero $\bigcup_{x \neq x_0} \{x\} = X \setminus \{x_o\} \notin \mathcal{T}_\infty$.

Ejercicios de topologías

Ejercicio 7. Sea $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\} \bigcup \{G_k : k \in \mathbb{R}\}$ donde $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y + k\}$.

a) Demostrar que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

b) ¿Es $\mathcal{T}$ una topología en $\mathbb{R}^2$ si "$k \in \mathbb{R}$" se sustituye por "$k \in \mathbb{N}$"?

c) ¿Y si se sustituye por "$k \in \mathbb{Q}$"?

Solución: a) Es topología pues:

- **i)** $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{T}$.
- **ii)** Sea $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}, U_i \neq \mathbb{R}, \emptyset \Rightarrow$ para todo $i \in I$, existe $k_i \in \mathbb{R}$ tal que $U_i = G_{k_i}$. Entonces, si $\{k_i \mid i \in I\}$ está acotado inferiormente, $\bigcup_{i \in I} G_{k_i} = G_k \in \mathcal{T}$ para $k = \inf\{k_i \mid i \in I\}$, mientras que, si $\{k_i \mid i \in I\}$ no está acotado inferiormente, $\bigcup_{i \in I} G_{k_i} = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$
- **iii)** Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{T}, U_i \neq \mathbb{R}, \emptyset \Rightarrow$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $k_i \in \mathbb{R}$ tal que $U_i = G_{k_i} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n G_{k_i} = G_k \in \mathcal{T}$ para $k = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$.

b) Si "$k \in \mathbb{R}$" se sustituye por "$k \in \mathbb{N}$" sigue siendo topología en $\mathbb{R}^2$ pues el razonamiento anterior sigue siendo válido, ya que si $\{k_i \mid i \in I\} \subset \mathbb{N}$, siempre existe $\min\{k_i \mid i \in I\} \in \mathbb{N}$.

c) Si "$k \in \mathbb{R}$" se sustituye por "$k \in \mathbb{Q}$" ya no es topologia pues no cumple (ii), ya que si consideramos $\{q_n\} \subset Q$ tal que $q_n \downarrow r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $\bigcup_{i \in I} G_{q_i} = G_r \notin \mathcal{T}$.

Comparación de topologías

Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías sobre un conjunto dado X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, diremos que $\mathcal{T}'$ es **más fina** que $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$, diremos que $\mathcal{T}'$ es **estrictamente más fina** que $\mathcal{T}$. Diremos que $\mathcal{T}$ es **comparable** con $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ o $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.

Observación. Dado X, la topología discreta es más fina que cualquier otra topología, y cualquier topología es más fina que la topología trivial. ¿Cuál es más fina, $\mathcal{T}_{CF}$ o $\mathcal{T}_{CN}$?.

Ejercicio 8. Compara las nueve topologías en el conjunto $X = \{a, b, c\}$.

Solución.

$\mathcal{T}_9 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} = \mathcal{T}_D$

$\mathcal{T}_8 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

$\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

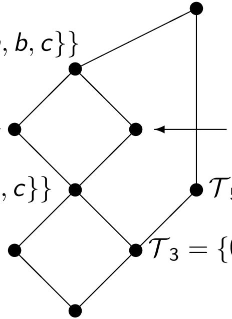
$\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$



$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a, b, c\}\} = \mathcal{T}_T$

Ejercicios de comparación de topologías

Ejercicio 9. Encontrar dos topologías $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ sobre un subconjunto X de modo que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no sea una topología. Encontrar una topología que contiene a ambas y es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

Solución. Sea $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\}$.
Entonces $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son topologías en X, pero $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$ no es topología porque $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.
La topología menos fina que contiene a $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ que se obtiene a partir de $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ añadiéndo todas las uniones e intersecciones“ ‘cruzadas” de elementos de $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$.

Ejercicio 10. Sea X un subconjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología en X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demostrar que $\mathcal{T}$ es la topología discreta en X.

Solución: Basta demostrar que $\{x\}$ es un conjunto abierto, para todo $x \in X$.
Sea $x \in X$. Como $X \setminus \{x\}$ es infinito, existen dos conjuntos infinitos $U_1, U_2 \subset X \setminus \{x\}$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Entonces $U_1 \cup \{x\}$ y $U_2 \cup \{x\}$ son infinitos y por tanto son abiertos. Por tanto $(U_1 \cup \{x\}) \cap (U_2 \cup \{x\}) = \{x\}$ también es abierto.

Ejercicios de comparación de topologías

Ejercicio 11. Se considera en $\mathbb{R}^2$ la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada (a,b) de U existe $\varepsilon > 0$ tal que $\big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}\big) \bigcup \big(\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big) \subset U$. Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$. En caso afirmativo compararla con la topología usual.

Solución: Dado $x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$, sea $C(x,\varepsilon) = \big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}\big) \bigcup \big(\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big)$. Veamos que $\mathcal{T}$ es topología (similar al caso de la topología usual en $\mathbb{R}^2$):

- **i)** Es inmediato que $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \mathcal{T}_u$.
- **ii)** Sea $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow$ existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0} \Rightarrow$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $C(x,\varepsilon) \subset U_{i_0}$ (por $U_{i_0} \in \mathcal{T}$) $\Rightarrow C(x,\varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.
- **iii)** Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{T}$. Sea $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow x \in U_i$ para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\} \Rightarrow$ para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, por U_i abierto, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $C(x,\varepsilon_i) \subset A_i \Rightarrow$ $C(x,\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$ (si $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$) $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Para terminar, faltaría vamos a comparar $\mathcal{T}$ con la topología usual.

Es inmediato que $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$: Si $U \in \mathcal{T}_u$ y $x \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$ y por tanto $C(x,\varepsilon) \subset U$. Luego $U \in \mathcal{T}$.

Por otra parte, $\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}$, pues el conjunto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\} \cup \{(0,0)\}$ está en $\mathcal{T}$ pero no en $\mathcal{T}_u$.

Base de una topología $\mathcal{T}$

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que $\mathcal{B}_\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$ es una base para $\mathcal{T}$ si para todo $U \in \mathcal{T}$ y todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}_\mathcal{T}$ tal que $x \in B \subset U$.
A los subconjuntos abiertos de $\mathcal{B}_\mathcal{T}$ se les llama abiertos básicos de la topología.

Ejemplos. a) $\mathcal{B}_1 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ es base de la topología usual sobre la recta real.
a) $\mathcal{B}_2 = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$ es también base de la topología usual en $\mathbb{R}^2$.
a) $\mathcal{B}_3 = \{(a,b) \times (c,d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$ es otra base de la topología usual en $\mathbb{R}^2$.

Proposición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base para $\mathcal{T}$ si cada elemento de $\mathcal{T}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Demostración (Inmediata). $\Rightarrow$) Sea $U \in \mathcal{T}$. Entonces para todo $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}_\mathcal{T}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Luego $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.
$\Leftarrow$) Sea $U \in \mathcal{T}$. Existe $\{B_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Dado $x \in U$, existe $i \in I$ tal que $x \in B_i \subset U$.

Ejercicio 12. Sea $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R}^2 \mid \text{para cada } x \in U \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } C(x,\varepsilon) \subset U\}$, donde, si $x = (a,b)$, $C(x,\varepsilon) = \big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}\big) \cup \big(\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big)$.
¿Es $\mathcal{B} = \{C(x,\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$ una base de $\mathcal{T}$?
Solución: No, porque $C(x,\varepsilon) \notin \mathcal{T}$.

Base de topología

Dado un subconjunto X, una base de topología sobre X es una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tales que:

a) Para cada $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ (es decir, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$).

b) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Proposición. Sea $\mathcal{B}$ una base de topología sobre X, y sea

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U \subset X \mid \text{ para cada } x \in U \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U\}.$$

Entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es una topología en X de la que $\mathcal{B}$ es una base.

Demostración. a) Es inmediato que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_u$.

b) Sea $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$.
Como $U_{i_0} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_{i_0}$. Entonces $x \in B \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.
Por tanto $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

c) Sean $U_1, U_2 \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Sea $x \in U_1 \cap U_2$. Entonces $x \in U_i$ para todo $i \in \{1, 2\}$.
Para cada $i \in \{1, 2\}$, como $U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, existe $B_i \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_i \subset U_i$.
Por (b) existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Por tanto $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.
La demostración de que $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}\,\mathcal{B}$ se haría por inducción.

Definición. Se dice que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es la **topología generada por la base de topología** $\mathcal{B}$.

La topología del límite inferior

Proposición. Demuestra que $\mathcal{B}' = \{[a,b) \mid a < b\}$ es una base de topología en $\mathbb{R}$.

Demostración. a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $[x, x+1) \in \mathcal{B}$ tal que $x \in [x, x+1)$.
b) Si $[a,b), [c,d) \in \mathcal{B}$ y $x \in [a,b) \cap [c,d)$, y tomamos $e = \max\{a,c\}$, $f = \min\{b,d\}$, se tiene $x \in [e,f) \subset [a,b) \cap [c,d)$.

Definición. La topología generada por $\mathcal{B}'$ se denota $\mathcal{T}_{[\,)}$ y se llama **topología del límite inferior** sobre $\mathbb{R}$.

Observación. En esta topología el conjunto $[0,1)$ es un conjunto abierto que contiene al punto 0.

Dos abiertos de la topología del límite inferior que contienen al punto 0

$[0,1)$ también es cerrado porque su complementario es $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ que es abierto.

Ejercicio 13. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son abiertos en $\mathcal{T}_{[\,)}$?
a) $A_1 = \{0\}$, **b)** $A_2 = (a,b)$, **c)** $A_3 = [a,b]$, **d)** $A_4 = (a,b]$, $a < b$,

Solución. Solo es abierto A_2.

Comparación de topologías a partir de sus bases

Proposición. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente, sobre X. Entonces son equivalentes:

a) $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$).

b) $\mathcal{T}' \supset \mathcal{B}$.

Demostración. (a)⇒(b) es obvia.
(b)⇒(a) Sea $U \in \mathcal{T}$, y queremos probar que $U \in \mathcal{T}'$. Sea $x \in U$. Puesto que B genera $\mathcal{T}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Por (c), $B \in \mathcal{T}'$, luego existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $X \in B' \subset B$. Entonces $x \in B' \subset U$, por lo que $U \in \mathcal{T}$

Ejercicio 14. ¿Qué relación hay entre $\mathcal{T}_u$ y $\mathcal{T}_{[\,)}$?

Solución. Como $(a, b) \in \mathcal{T}_{[\,)}$, se tiene $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_{[\,)}$, y como como $[a, b) \notin \mathcal{T}_u$ se tiene $\mathcal{T}_u \neq \mathcal{T}_{[\,)}$. Luego $\mathcal{T}_{[\,)}$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}_u$.

Subbase de topología

Sea X un subconjunto. Una **subbase $\mathcal{S}$ de topología** sobre X es cualquier familia de subconjuntos de X cuya unión es igual a X.

Proposición. Sea $\mathcal{S}$ una subbase de topología sobre X, y sea $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.
Entonces $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ es una base de topología en X tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$.

Demostración. Dado $x \in X$, existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S$ y por tanto existe $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ tal que $x \in B_{\mathcal{S}}$.
Sean $B, B' \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Entonces $B \cap B'$ es también una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$, por lo que pertenece a $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$.

Definición. La topología generada por $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ se denota $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ y se dice que está **generada por la subbase de topología** $\mathcal{S}$.

Ejemplo. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y sea $\mathcal{S} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$, que es una subbase de topología, pues la unión de sus elementos es X.
Añadiendo las intersecciones finitas obtenemos $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{\{a\}, \{c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$.
Añadiendo el conjunto vacío y las uniones arbitrarias de elementos de a $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ obtenemos $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$, que es la topología generada por $\mathcal{S}$.

Ejercicios de bases de topologías

Ejercicio 15. Sea $K = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$, sea $\mathcal{B}_u$ una base de la topología usual en $\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_u \bigcup \{B \setminus K \mid B \in \mathcal{B}_u\}$. Demostrar que $\mathcal{B}_K$ es base de una topología. Considera los conjuntos K y $K \cup \{0\}$. ¿Son cerrados en la topología generada por $\mathcal{B}_K$?

Solución: Vemos primero que $\mathcal{B}_K$ es base de una topología:

i) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $B = (x-1, x+1) \in \mathcal{B}_u \subset \mathcal{B}_K$ tal que $x \in B$.

ii) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_K$ y sea $x \in B_1 \cap B_2$.

- Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_u$, por ser $\mathcal{B}_u$ base, existe $B \in \mathcal{B}_u \subset \mathcal{B}_K$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.
- Si $B_1 \in \mathcal{B}_u, B_2 \notin \mathcal{B}_u$, existe $B_2' \in B_u$ tal que $B_2 = B_2' \setminus K$ (por tanto $x \notin K$). Como $x \in B_1 \cap B_2'$, por ser $\mathcal{B}_u$ base, existe $B' \in \mathcal{B}_u$ tal que $x \in B' \subset B_1 \cap B_2'$. Sea $B = B' \setminus K \in \mathcal{B}_K$. Entonces $x \in B \subset B_1 \cap B_2$
- Por simetría, si $B_1 \notin \mathcal{B}_u, B_2 \in \mathcal{B}_u$, existe $B \in \mathcal{B}_K$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.
- Si $B_1, B_2 \notin \mathcal{B}_u$, existen $B_1', B_2' \in B_u$ tales que $B_1 = B_1' \setminus K$, $B_2 = B_2' \setminus K$ (por tanto $x \notin K$). Como $x \in B_1' \cap B_2'$, por ser $\mathcal{B}_u$ base, existe $B' \in \mathcal{B}_u$ tal que $x \in B' \subset B_1' \cap B_2'$. Sea $B = B' \setminus K \in \mathcal{B}_K$. Entonces $x \in B \subset B_1 \cap B_2$

Finalmente K y $K \cup \{0\}$ son ambos cerrados pues sus complementarios son abiertos:

$K = (-\infty, 0) \cup ((1,2) \setminus K) \cup (1, \infty)$ y $K \cup \{0\} = (-\infty, 0) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \right) \cup (1, \infty)$.

Ejercicios de bases de topologías

Ejercicio 16. a) Demuestra que $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es una base numerable de la topología usual $\mathcal{T}_u$ en $\mathbb{R}$.
b) Demuestra que $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es base para una topología.
c) ¿Qué relación hay entre $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$ y $\mathcal{T}_{[\,)}$?

Solución: **a)** Vemos primero que $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es una base de $\mathcal{T}_u$. Sea $x \in U \in \mathcal{T}_u$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. Sabemos que existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$. Entonces $x \in (a, b) \subset U$.

b) Vemos ahora que $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es una base de topología.

- **i)** Para cada $x \in X$, se tiene que $x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1) \in \mathcal{B}_2$ ($\lfloor x \rfloor =$parte entera de x).
- **ii)** Si $[a, b), [c, d) \in \mathcal{B}_2$ y $x \in [a, b) \cap [c, d)$, entonces $a, b \leq x < c, d$ y por tanto $x \in [\max\{a, b\}, \min\{c, d\}) \subset [a, b) \cap [c, d)$, con $[\max\{a, b\}, \min\{c, d\}) \in \mathcal{B}$.

c) Finalmente, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$ es distinta de $\mathcal{T}_{[\,,\,)}$ pues $[\sqrt{2}, 2) \in \mathcal{T}_{[\,,\,)}$ pero $[\sqrt{2}, 2) \notin \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$, ya que dado el punto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ no existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $\sqrt{2} \subset [a, b) \subset [\sqrt{2}, 2)$.
Por otra parte, si $[a, b) \in \mathcal{B}_2$, se tiene $[a, b) \in \mathcal{T}_{[\,,\,)}$.
Por tanto $\mathcal{T}_{[\,,\,)}$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$.

Observación. Análogamente, son bases numerables de la topología usual en $\mathbb{R}^2$:
$\mathcal{B}_1 = \{B_\varepsilon((a, b)) \mid a, b, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

Ejercicios de bases de topologías

Ejercicio 17. Define una topología en $\mathbb{R}$ (dando la lista de los subconjuntos abiertos) que contenga como abiertos a los subconjuntos $(0, 2)$ and $(1, 3)$ y que sea lo menos fina posible.

Solución: Como la familia $\{(0, 2), (1, 3)\}$ no cubre todo $\mathbb{R}$ no es una subbase de topología. Añadiendo el conjunto $\mathbb{R}$, obtenemos $\mathcal{S} = \{(0, 2), (1, 3), \mathbb{R}\}$ que sí es una subbase de topología.
Añadiendo las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$, obtenemos una base de topología $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{(0, 2), (1, 2), (1, 3), \mathbb{R}\}$.
Añadiendo el conjunto vacío y las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ obtenemos la topología generada por $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \{\emptyset, (0, 2), (1, 2), (1, 3), (0, 3), \mathbb{R}\}$, que es la menos fina que contiene como abiertos a los dos conjuntos iniciales.

Ejercicios de bases de topologías

Ejercicio 18. Sean las siguientes familias de subconjuntos de $[0,1]$:
$\mathcal{B}_1 = \{(a,b) \mid 0 < a < b < 1\} \cup \{[0,1], \emptyset\}$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \cup \{\{0\},\{1\}\}$,
$\mathcal{B}_3 = \{(a,b) \mid 0 \leq a < b \leq 1\} \cup \{[0,1], \emptyset\}$, $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3 \cup \{\{0\},\{1\}\}$

i) ¿Son bases de topología?

ii) Si lo son, compara las topologías $\mathcal{T}_i$ generadas por ellas.

Solución: **i)** Todas lo son, pues si $\mathcal{B}$ es cualquiera de ellas se cumple que:
a) Para cada $x \in X$, existe $[0,1] \in \mathcal{B}$ tal que $x \in [0,1]$.
b) Si B_1, B_2 y $x \in B_1 \cap B_2$:
- Si B_1 ó $B_2 = X \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.
- Si $B_1 = (a,b), B_2 = (c,d) \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 = (\max(a,c), \min(b,d)) \in \mathcal{B}$.
- Para $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_4$, si B_1 ó $B_2 = \{0\}$ ó $\{1\} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \{0\}$ ó $\{1\} \in \mathcal{B}$.

ii) Como $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \Rightarrow \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, y como $\{0\} \in \mathcal{T}_2 \setminus \mathcal{T}_1 \Rightarrow \mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$ (análog. $\mathcal{T}_3 \subsetneq \mathcal{T}_4$).
Como $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_3 \Rightarrow \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_3$, y como $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{T}_1$ (pues $(0,b) = \bigcup(\frac{1}{n}, b) \in \mathcal{T}_1$, $(a,1) = \bigcup(a, 1-\frac{1}{n}, b) \in \mathcal{T}_1$, $(0,1) = \bigcup(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) \in \mathcal{T}_1) \Rightarrow \mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_1$. Luego $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_3$.
Análogamente se comprueba que $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_4$.

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Sea X es un espacio topológico y sea $x \in X$. Se dice que $U \subset X$ es un **entorno** de x si U es un subconjunto abierto que contiene a x.
Se denota por $\mathcal{U}^x$ la **familia de entornos** de x.

Observación. En muchos libros, un entorno U de x es un subconjunto, no necesariamente abierto, que contiene un abierto que contiene a x.

Sea X es un espacio topológico, sea $A \subset X$ y sea $x \in X$. Entonces x es:

a) un **punto interior** de A si existe $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $U \subset A$,
b) un **punto adherente** de A si para todo $U \in \mathcal{U}^x$, $U \cap A \neq \emptyset$,
c) un **punto de acumulación** de A si para todo $U \in \mathcal{U}^x$, $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
d) un **punto aislado** de A si existe $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $U \cap A = \{x\}$,
e) un **punto frontera** de A si para todo $U \in \mathcal{U}^x$, $U \cap A \neq \emptyset$, $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Se define el **interior** $\mathring{A}$, la **adherencia** $\bar{A}$ y la **frontera** $\mathrm{Fr}(A)$ de A como el subconjunto de puntos interiores, adherentes y frontera, respectivamente, de A.
El subconjunto de puntos de acumulación se denota A' y el de puntos aislados $\mathrm{I}(A)$.

Observación. Para estudiar el carácter de un punto basta considerar, en vez de entornos cualesquiera de x, entornos que sean elementos de una base de la topología en X.

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Ejemplos en $\mathbb{R}$ para distintas topologías.

	$A=\{0\}$					$A=[0,1]$				
	$\bar{A}$	$\mathring{A}$	$\mathrm{Fr}(A)$	A'	$\mathrm{I}(A)$	$\bar{A}$	$\mathring{A}$	$\mathrm{Fr}(A)$	A'	$\mathrm{I}(A)$
$\mathcal{T}_t$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$
$\mathcal{T}_d$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0\}$	$[0,1]$	$[0,1]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[0,1]$
$\mathcal{T}_{CF}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$
$\mathcal{T}_{CN}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$
$\mathcal{T}_u$	$\{0$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$[0,1]$	$(0,1)$	$\{0,1\}$	$[0,1]$	$\emptyset$
$\mathcal{T}_{[\,)}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$[0,1]$	$[0,1)$	$\{1\}$	$[0,1)$	$\{1\}$
$\mathcal{T}_0$	$\mathbb{R}$	$\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\{0\}$	$\mathbb{R}$	$[0,1]$	$\mathbb{R}\setminus[0,1]$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\{0\}$
$\mathcal{T}_2$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$[0,1]$	$\emptyset$	$[0,1]$	$\emptyset$	$[0,1]$

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Propiedades. Dado un subconjunto A de un espacio topológico X:

a) $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$.

b) $\mathring{A}$ es un subconjunto abierto y $\bar{A}$ es un subconjunto cerrado.

c) $\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en A (si U abierto $U \subset A \Rightarrow U \subset \mathring{A}$).

d) $\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A (si F cerrado $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset F$).

e) A es abierto si y solo si $\mathring{A} = A$, y A es cerrado si y solo si $\bar{A} = A$.

Demostración. a) Inmediato a partir de la definición de $\mathring{A}$ y $\bar{A}$.

b) Para todo $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow$ existe U_x abierto tal que $x \in U_x \subset A$ ($\Rightarrow U_x \subset \mathring{A}$) $\Rightarrow$ $\mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} U_x$ abierto (por ser unión de abiertos).

c) Para todo $x \notin \bar{A}$ existe U_x abierto tal que $x \in U_x$ y $U_x \cap A = \emptyset$ ($\Rightarrow U_x \cap \bar{A} = \emptyset$) $\Rightarrow$ para todo $x \notin \bar{A}$ existe F_x cerrado tal que $x \notin F$ y $\bar{A} \subset F_x \Leftrightarrow \bar{A} = \bigcap_{x \in \bar{A}} F_x$ cerrado (por ser intersección de cerrados).

c) Immediato.

d) $A \subset F$ cerrado $\Rightarrow X \setminus F$ abierto tal que $(X \setminus F) \cap A = \emptyset \Rightarrow (X \setminus F) \cap \bar{A} \Rightarrow \bar{A} \subset F$.

e) Immediato por las propiedades anteriores.

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Más propiedades. Dado un subconjunto A de un espacio topológico X:

f) $\bar{A} = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A)$ (unión disjunta).

g) $\bar{A} = A' \cup \mathrm{I}(A)$ (unión disjunta).

h) $\bar{A} = A \cup A'$ (unión no necesariamente disjunta).

i) A es cerrado si y solo si $A' \subset A$.

Demostración. **f)** El contenido $\supset$ es inmediato a partir de la definición de $\bar{A}$, $\mathring{A}$ y $\mathrm{Fr}(A)$.
Supongamos $x \in \bar{A}$. Entonces para todo $U \in \mathcal{U}^x$, $U \cap A \neq \emptyset$.
Entonces, o bien existe $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$ (en cuyo caso $x \in \mathring{A}$), o bien para todo $U \in \mathcal{U}^x$ es $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ (en cuyo caso $x \in \mathrm{Fr}(A)$).
Además, del razonamiento anterior se deduce que $\mathring{A} \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$

g) Se demuestra de forma análoga a (f)

h) El contenido $\supset$ es inmediato a partir de la definición de $\bar{A}$ y A'.
Supongamos $x \in \bar{A}$. Entonces para todo $U \in \mathcal{U}^x$, $U \cap A \neq \emptyset$. Si $x \notin A$, para todo $U \in \mathcal{U}^x$ se tiene $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ y por tanto $x \in A'$.

i) A cerrado $\Leftrightarrow A = \bar{A} \Leftrightarrow A = A \cup A' \Leftrightarrow A' \subset A$.

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Casos particulares.

j) En cualquier espacio topológico $(X, \mathcal{T})$:
- si $A = \emptyset$: $\bar{A} = \mathring{A} = \mathrm{Fr}(A) = A' = \mathrm{I}(A) = \emptyset$,
- si $A = X$: $\bar{A} = \mathring{A} = X$, $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$, $\mathrm{I}(A) = \{x \mid \{x\} \in \mathcal{T}\}$,$A' = X \setminus \mathrm{I}(A)$.

k) En $(X, \mathcal{T}_t)$, si $A \neq \emptyset, X$: $\bar{A} = X$, $\mathring{A} = \emptyset$, $\mathrm{Fr}(A) = X$,
$$A' = \begin{cases} X \setminus \{a\} & \text{si } A = \{a\} \\ X & \text{si } |A| \geq 2 \end{cases}, \ \mathrm{I}(A) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } A = \{a\} \\ \emptyset & \text{si } |A| \geq 2 \end{cases}.$$

l) En $(X, \mathcal{T}_d)$, si $A \neq \emptyset, X$: $\bar{A} = A$, $\mathring{A} = A$, $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$, $A' = \emptyset$, $\mathrm{I}(A) = A$.

m) En $(X, \mathcal{T}_a)$, si $A \neq \emptyset, X$:
$$\bar{A} = \begin{cases} X & \text{si } a \in A \\ A & \text{si } a \notin A \end{cases}, \ \mathring{A} = \begin{cases} A & \text{si } a \in A \\ \emptyset & \text{si } a \notin A \end{cases}, \ \mathrm{Fr}(A) = \begin{cases} X \setminus A & \text{si } a \in A \\ A & \text{si } a \notin A \end{cases},$$
$$A' = \begin{cases} X \setminus \{a\} & \text{si } a \in A \\ \emptyset & \text{si } a \notin A \end{cases}, \ \mathrm{I}(A) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } a \in A \\ A & \text{si } a \notin A \end{cases}.$$

Ejercicio: Obtén caracterizaciones similares para $\mathcal{T}_{CF}$ y $\mathcal{T}_{CN}$.

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Ejemplos en $\mathbb{R}$ con $\mathcal{T}_u$ y $\mathcal{T}_{[\ ,\ )}$.

$\mathcal{T}_u$									
A	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$	$(0,1)$	$[0,1]$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}$
$\bar{A}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$	$\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$	$[0,1]$	$[0,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathring{A}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(0,1)$	$(0,1)$	$\emptyset$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Fr}(A)$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$	$\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\mathbb{R}$	$\{0\}$	$\emptyset$
A'	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{0\}$	$[0,1]$	$[0,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{I}(A)$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\mathcal{T}_{[\ ,\ )}$										
A	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	$\{\frac{-1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$	$(0,1)$	$[0,1]$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}$
$\bar{A}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$	$\{\frac{-1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$	$[0,1)$	$[0,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathring{A}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(0,1)$	$[0,1)$	$\emptyset$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Fr}(A)$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$	$\{\frac{-1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\}\cup\{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\mathbb{R}$	$\{0\}$	$\emptyset$
A'	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$[0,1)$	$[0,1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{I}(A)$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{\frac{-1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Ejercicios de cálculo de interior, adherencia,...

Ejercicio 19. Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ con la topología usual:

a) $A = (0, 1]$ **b)** $A = \left\{ \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ **c)** $A =$ Conjunto de Cantor.

Solución: **a)** $\mathring{A} = (0, 1)$, $\bar{A} = , 1$, $\mathrm{Fr}(A) = \{0, 1\}$, $\mathrm{I}(A) = \emptyset$, $A' = , 1$.

b) $\mathring{A} = \emptyset$, $A' = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{0\}$, $\bar{A} = A \cup A' = A$, $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} = A$, $\mathrm{I}(A) = A \setminus A'$.

c) $\mathring{A} = \emptyset$, $\bar{A} = A$ (por A intersección de cerrados), $\mathrm{Fr}(A) = A$, $\mathrm{I}(A) = \emptyset$, $A' = A$.

Ejercicio 20. Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual:

a) $A = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$ **b)** $A = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \right) \mid x \neq 0 \right\} \cup \{(0, 0)\}$

Solución: **a)** $\mathring{A} = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$, $\bar{A} = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$, $\mathrm{Fr}(A) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$, $\mathrm{I}(A) = \emptyset$, $A' = \bar{A}$.

b) $\mathring{A} = \emptyset$, $\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A}$, $\mathrm{I}(A) = \emptyset$, $A' = \bar{A}$.

Ejercicios de cálculo de interior, adherencia,...

Ejercicio 21. Calcular interior, adherencia, frontera y subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual:

c) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid xy = 0\}$ **d)** $A = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \mid x \neq 0 \right\}$

e) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2n} < x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2n-1} \right\}$.

Solución: **c)** $\mathring{A} = A$, $\bar{A} = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \mid xy = 0\}$, $\mathrm{I}(A) = \emptyset$, $A' = \mathbb{R}^2$.

d) $\mathring{A} = A \setminus (\{0\} \times [-1,1])$, $\bar{A} = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Fr}(A) = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$, $\mathrm{I}(A) = \emptyset$, $A' = \bar{A}$.

e) $\mathring{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2n} < x^2 + y^2 < \frac{1}{2n-1} \right\}$,

$\bar{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2n} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2n-1} \right\} \cup \{(0,0)\}$,

$\mathrm{Fr}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{n} \right\} \cup \{(0,0)\}$, $\mathrm{I}(A) = \emptyset$, $A' = \bar{A}$.

Ejercicios de cálculo de interior, adherencia,...

Ejercicio 22. Sea $A = (-4, -\sqrt{2}) \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, 3) \cup \left\{ \frac{3n+10}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$.

Hallar $\mathring{A}$), $\bar{A}$ y $\mathrm{Fr}(A)$, A' e $\mathrm{I}(A)$ en: **a)** $\mathcal{T}_u$, **b)** $\mathcal{T}_{[\ ,\ )}$, **c)** $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Solución: Denotamos $S = \left\{ \frac{3n+10}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) $\bar{A} = [-4, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, 3] \cup S$,
$\mathring{A} = (-4, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3)$, $\mathrm{Fr}(A) = \{-4, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 3\} \cup S$,
$\mathrm{I}(A) = \{0\} \cup S$, $A' = [-4, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3]$.

b) $\bar{A} = [-4, -\sqrt{2}) \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, 3] \cup S$,
$\mathring{A} = (-4, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3)$, $\mathrm{Fr}(A) = \{-4, 0, 3\} \cup S$,
$\mathrm{I}(A) = \{0\} \cup S$, $A' = [-4, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3]$.

c) $\bar{A} = [-4, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, 3] \cup S$,
$\mathring{A} = (-4, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3)$, $\mathrm{Fr}(A) = \{-4, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 3\} \cup S$,
$\mathrm{I}(A) = \{0\} \cup S$, $A' = [-4, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3]$.

Ejercicios de cálculo de interior, adherencia,...

Ejercicio 23. Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Demostrar que:

a) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ (pero no tiene por qué darse la igualdad),

b) si $A \bigcup B = X$ entonces $\mathring{A} \bigcup \bar{B} = X$,

c) si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\mathring{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.

Solución: **a)** Como $\bar{A} \cap \bar{B}$ es cerrado y contiene a $A \cap B$ se tiene $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. La igualdad no tiene que darse. Por ejemplo, si $A = B_1(1,0) \subset \mathbb{R}^2$ y $B = B_1(-1,0) \subset \mathbb{R}^2$ se tiene que $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ mientras que, con la topología usual, en $\mathbb{R}^2$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{(0,0)\}$.
b) Sea $x \in X$. Si $x \in \mathring{A}$ entonces $x \in \mathring{A} \bigcup \bar{B}$. Por otra parte, si $x \notin \mathring{A}$, no existe U abierto tal que $U \subset A$. Luego para todo U abierto se cumple $U \cap B \neq \emptyset$. Por tanto $x \in \bar{B} \subset \mathring{A} \bigcup \bar{B}$.
c) Si $x \in \mathring{A}$, existe U abierto tal que $U \subset A$. Luego $U \cap B = \emptyset$. Por tanto $x \notin \bar{B}$. Luego $\mathring{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.

Axiomas de separación

Un espacio topológico X es:

- T_1 si los subconjuntos unipuntuales cerrados ($\Leftrightarrow$ para cada par x, y de puntos distintos de X, existen $U_1 \in \mathcal{U}^x$ y $U_2 \in \mathcal{U}^y$ tales que $y \notin U_1$ y $x \notin U_2$).
- T_0 si para cada par x, y de puntos distintos de X, existe $U_1 \in \mathcal{U}^x$ tal que $y \notin U_1$, o existe $U_2 \in \mathcal{U}^y$ tal que $x \notin U_2$.
- T_2 (o de Hausdorff) si para cada par x, y de puntos distintos de X, existen $U_1 \in \mathcal{U}^x$ y $U_2 \in \mathcal{U}^y$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Observación. $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

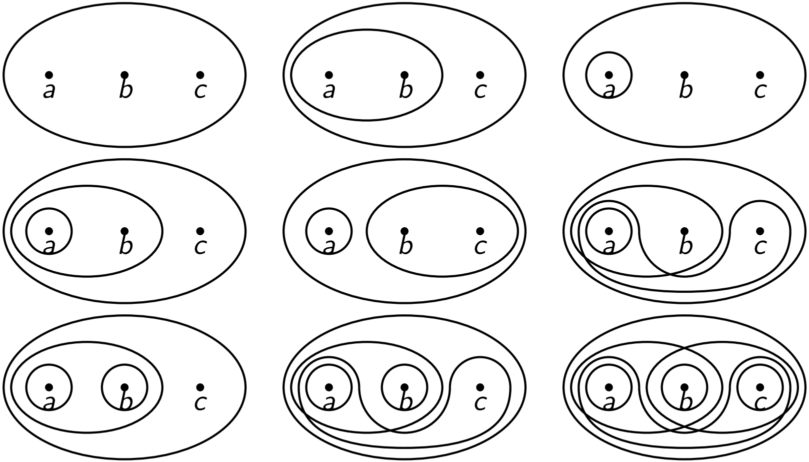
Ejemplo. La topología usual $\mathcal{T}_u$ en $\mathbb{R}^n$ y la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ en $\mathbb{R}$ son T_2.

Ejemplo. Dado un conjunto X con dos o más elementos en la tabla se muestra qué axiomas de separación cumplen las topologías básicas que conocemos.
En el caso de $\mathcal{T}_{CF}$ el resultado es válido si X es infinito, pues si X es finito, $\mathcal{T}_{CF} = \mathcal{T}_d$. (Análogamente, $\mathcal{T}_{CN}$ es T_1 pero no es T_2, salvo que $|X| \leq \aleph_0$, en cuyo caso $\mathcal{T}_{CN} = \mathcal{T}_d$).

	T_0	T_1	T_2
$\mathcal{T}_d$	SI	SI	SI
$\mathcal{T}_{CF}$	SI	SI	NO
$\mathcal{T}_a$	SI	NO	NO
$\mathcal{T}_t$	NO	NO	NO

Ejercicios. Axiomas de separación

Ejercicio 24. Clasifica las topologías en un espacio con 3 elementos según los axiomas de separación que cumplen.



Solución: Solo es T_2 la topología discreta (la última).

Solo es T_1 la topología discreta.

Son T_0 las 6 de abajo (exceptuando el central).
Como todas son más finas que la cuarta, y ésta es T_0, las demás también lo serán.

Ejercicios de axiomas de separación

Ejercicio 25. Dado un espacio topológico X y una sucesión de puntos $(x_n) \subset X$, se dice que (x_n) converge a x si para todo entorno U de x existe n_0 tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$.
Demuestra que si X es un espacio T_2, entonces una sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X.
¿Es cierto si X no es T_2?

Solución. Sea (x_n) una sucesión de puntos de X que converge a x e y. Sean U y V entornos disjuntos de x e y, respectivamente. Puesto que $x_n \Rightarrow x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Esto implica que (x_n) no puede converger a y.
Si X no es T_2 una sucesión (x_n) puede converges a varios puntos. Por ejemplo, si $X = (\{a, b\}, \mathcal{T}_t)$ y (x_n) es la sucesión constante $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces (x_n) converge a a y a b. (En general. si X es un espacio cualquiera con la topología discreta, cualquier sucesión converge a todos los puntos del espacio).

Ejercicios de axiomas de separación

Ejercicio 26. Sea X un espacio T_1, sea $A \subset X$ y sea $x \in X$. Demuestra que $x \in A'$ si y solo si todo entorno de x contiene infinitos puntos de A.
¿Es cierto si X no es T_1?

Solución. Si cada entorno de X interseca a A en infinitos puntos, esta claro que interseca a A en algún otro punto distinto de X, por lo que $x \in A'$.
Recíprocamente, supongamos que $X \in A'$ y supongamos que algún $U \in \mathcal{U}^x$ interseca a A (y por tanto a $A \setminus \{x\}$) en un subconjunto finito de puntos. Sea $U \cap (A \setminus \{x\}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Entonces $U \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ es un subconjunto abierto que contiene a x, tal que $U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ lo que contradice el que $x \in A'$.
Si X no es T_1 un punto de acumulación puede tener un entorno finito. Por ejemplo, si $X = (\{a, b\}, \mathcal{T}_t)$ y $A = \{a\}$, entonces $A' = \{b\}$ y el único entorno de b es X que contiene solo un punto de A.

Funciones continuas

Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. Se dice que f es **continua en $x \in X$** si para cada $V \in \mathcal{U}^{f(x)}$, existe un $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $f(U) \subset V$.
Se dice que f es **continua en X** si y solo si lo es en todo punto $x \in X$.

Proposición. Sean X, Y espacios topológicos. Entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua en X si y solo si para cada subconjunto abierto V de Y, se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea V abierto de Y. Sea $x \in f^{-1}(V)$. Entonces $f(x) \in V$, luego existe $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $f(U) \subset V$. Entonces $x \in U \subset f^{-1}(V)$. Luego $f^{-1}(V)$ es abierto.
$\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y sea $V \in \mathcal{U}^{f(x)}$. Entonces $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{U}^x$ y $f(U) \subset V$.

Proposición. Sean X, Y espacios topológicos. Entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua en X si y solo si $f^{-1}(B)$ es abierto de X para todo $B \in \mathcal{B}'$ base de la topología de Y.

Demostración. $\Rightarrow$) Inmediato
$\Leftarrow$) Sea V abierto de Y $\Rightarrow$ existe $\{B_i\} \subset \mathcal{B}'$ tal que $V = \bigcup_{i\in I} B_i \Rightarrow f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ que es abierto por ser unión de abiertos.

Observación. Si $X = \mathbb{R}^m$ e $Y = \mathbb{R}^n$ con la topología usual, la definición de continuidad coincide con la de (ε, δ). Por tanto, las funciones continuas de Cálculo siguen siendo continuas.

Funciones continuas

Proposición. Sea $f : X \longrightarrow Y$. Son equivalentes:

a) f es continua en X.

b) $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para todo subconjunto cerrado C de Y.

c) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.

Demostración. (a)⇒(b) Sea C cerrado de $Y \Rightarrow f^{-1}(C)$ es cerrado porque $X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$ es abierto.

(b)⇒(a) Sea V abierto de $Y \Rightarrow f^{-1}(V)$ es abierto porque $X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V)$ es cerrado.

(b)⇒(c) Sea $A \subset X \Rightarrow$ como $\overline{f(A)}$ es cerrado en Y, $f^{-1}\overline{f(A)}$ es cerrado en $X \Rightarrow$ como $A \subset f^{-1}f(A) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, se tiene $\bar{A} \subset f^{-1}\overline{f(A)}) \Rightarrow f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(c)⇒(b) Sea C cerrado de Y y sea $A = f^{-1}(C) \Rightarrow f(\overline{f^{-1}(C)}) = f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{ff^{-1}(C)} \subset \overline{C} = C \Rightarrow \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \Rightarrow \overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C) \Rightarrow f^{-1}(C)$ es cerrado.

Ejercicio 27. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua ¿hay alguna relación entre $f(\mathring{A})$ y $\overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$?

Solución. Para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, si $A = [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$, se tiene $f(\mathring{A}) = [-1, 0) \cup (0, 1]$ y $\overset{\circ}{\widehat{f(A)}} = (-1, 1)$. Luego $f(\mathring{A}) \not\subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$ y $\overset{\circ}{\widehat{f(A)}} \not\subset f(\mathring{A})$.

Homeomorfismos

Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una biyección. Si f y f^{-1} son ambas continuas, se dice que f es un **homeomorfismo**.
Si existe un homemorfismo de X a Y se dice que X e Y son **homeomorfos** y se denota $X \simeq Y$.

Proposición. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una biyección. Entonces f es un homeomorfismo si y solo si se cumple que:

"$U \subset X$ es abierto de X si y solo si $f(U)$ es abierto de $f(X)$".

Ejemplo. $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$ es homeomorfo a X con la topología $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\}$, pero no a X con la topología $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

Lema. Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ continuas. Entonces $gf : X \longrightarrow Z$ es continua.

Teorema. La relación "ser homeomorfo a" es una relación de equivalencia en el conjunto de los espacios topológicos. Es decir:
a) $X \simeq X$, **b)** $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$, **c)** $X \simeq Y$ e $Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$.

Ejercicio 28. Demostrar los resultados de esta transparencia.

Ejercicios sobre continuidad y homeomorfismos

Ejercicio 29. Sea X un conjunto con dos topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$. Demostrar que la identidad $\mathrm{Id} : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$, $\mathrm{Id}(x) = x$ es continua si y sólo si $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}'$.

Solución: $\mathrm{Id} : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$ es continua $\Leftrightarrow$ para todo V abierto de $(X, \mathcal{T}')$, $\mathrm{Id}^{-1}(V) = V$ es abierto de $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}'$.

Ejercicio 30. Probar que existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_d)$ sobreyectivas y continuas, pero que no existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ con esas propiedades.
Indicación: La imagen inversa de $\mathbb{R}$ sería una unión no numerable de abiertos disjuntos y $[a, b)$ contiene siempre un número racional.

Solución: $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)}) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{T}_d)$ dada por $f(x) = n$ si $x \in [n, n+1)$ es continua y sobreyectiva.
Supongamos que existe $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ es continua y sobreyectiva $\Rightarrow$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x)$ es abierto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)}) \Rightarrow$ para todo $x \in \mathbb{R}$, existen $a_x, b_x \in \mathbb{R}$ tales que $[a_x, b_x) \subset f^{-1}(x) \Rightarrow$ existe una familia $\{[a_x, b_x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ que cumple que $[a_x, b_x) \cap [a_y, b_y) = \emptyset$ si $x \neq y \Rightarrow$ para todo $x \in X$ existe $q_x \in [a_x, b_x) \cap Q$ y por lo anterior $q_x \neq q_y$ si $x \neq y \Rightarrow$ existe una familia no numerable de número racionales distintos (ABSURDO)

Ejercicios sobre continuidad y homeomorfismos

Ejercicio 31. Demostrar que las propiedades T_0, T_1 y T_2 son topológicas, esto es, se conservan por homeomorfismos.

Solución: Lo demostramos para la propiedad T_0 (para las otras dos propiedades, la demostración sería análoga).
Sea X un espacio topológico T_0 y sea Y espacio topológico homeomorfo a X.
Vamos a ver que Y es también T_0.
Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo y sean $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$.
Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$.
Como f es biyectiva se tiene que $x_1 \neq x_2$, y como X es T_2 existe $U_1 \in \mathcal{U}^{x_1}$ tal que $x_2 \notin U_1$ o existe $U_2 \in \mathcal{U}^{x_2}$ tal que $x_1 \notin U_2$.
Supongamos que existe $U_1 \in \mathcal{U}^{x_1}$ tal que $x_2 \notin U_1$ (en el otro caso se razonaría igual por simetría).
Sea $V_1 = f(U_1)$ que es un conjunto abierto de Y (por ser f homeomorfismo) y cumple que $y_1 \in V_1$ (obvio) y que $y_2 \notin V_1$ (por f biyectiva y $x_2 \notin U_1$).
Es decir, V_1 es un entorno de y_1 tal que $y_2 \notin V_1$.
Luego Y es T_0.

Ejercicios sobre continuidad y homeomorfismos

Ejercicio 32. Hallar una función biyectiva que transforme abiertos en abiertos pero que no sea un homeomorfismo.

Solución: Un ejemplo con distintas topologías sería $\mathrm{Id} : (X, \mathcal{T}_t) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ que es biyectiva y transforma abiertos en abiertos pero que no es un homeomorfismo.

Ejercicio 33. Estudiar si $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$, es homoeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{(\,]})$. ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?

Solución: $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{(\,]})$ dada por $f(x) = -x$ es un homeomorfismo pues:
- f es biyectiva,
- f es continua pues si $(a, b]$ es un abierto básico de $\mathcal{T}_{(\,,\,]}$, $f^{-1}((a, b]) = [-b, a) \in \mathcal{T}_{[\,,\,)}$,
- f^{-1} es continua pues si $[a, b)$ es un abierto básico de $\mathcal{T}_{[\,,\,)}$, $f([a, b)) = (-b, a] \in \mathcal{T}_{(\,,\,]}$.

En cambio, la aplicación $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,,\,)}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{(\,,\,]})$ no es un homeomorfismo pues no es continua ($(a, b]$ es un abierto básico de $\mathcal{T}_{(\,]}$, pero $\mathrm{Id}^{-1}((a, b]) = (a, b] \notin \mathcal{T}_{[\,)}$).

Ejercicios sobre continuidad y homeomorfismos

Ejercicio 34. Demostrar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ no es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$.

Solución: Supongamos que $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{(\,]})$ es un homeomorfismo. Entonces, como $[0, 1)$ es cerrado, se tendría que $f^{-1}([0, 1))$ habría de ser cerrado, y por tanto finito (imposible por ser f biyectiva).

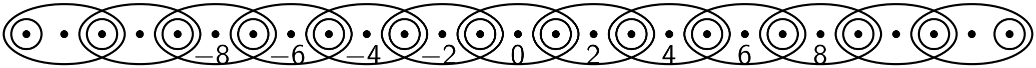
Ejercicio 35. Demostrar que si $f : (X, \mathcal{T}_{CF}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ es continua con $\mathcal{T}$ topología T_2, entonces f es constante.

Solución: Demostramos que el resultado es cierto si $|X|$ es infinito.
Supongamos que $f : (X, \mathcal{T}_{CF}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_{(\,]})$ es continua. Supongamos que f no es constante. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como X es T_2 existen $U \in \mathcal{U}^{f(x_1)}$, $V \in \mathcal{U}^{f(x_2)}$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Entonces $f^{-1}(\mathcal{U}^{f(x_2)})$ y $f^{-1}(\mathcal{U}^{f(x_2)})$ serían abiertos no vacíos disjuntos de $(X, \mathcal{T}_{CF})$ (algo imposible en $\mathcal{T}_{CF}$).
Si $|X|$ es finito el resultado no es cierto.
Por ejemplo, Si $X = \{a, b\}$, la topología de los complementos finitos coincide con la topología discreta, que además es T_2. Entonces, si consideramos la identidad de $(X, \mathcal{T}_{CF})$ en sí mismo es continua pero no es constante.

La recta digital

Se dice que un espacio topológico es **localmente finito** si todo punto p está contenido en un abierto finito y en un cerrado finito.

Ejemplos en $\mathbb{Z}$. a) La topología en $\mathbb{Z}$ cuyos subconjuntos abiertos son los intervalos semi-infinitos de la forma $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ es una topología T_0 que no es localmente finita.
b) La topología de los complementos finitos no es ni T_0, ni T_1, ni localmente finita.
c) La topología de los complementos numerables coincide con la topología discreta.
d) La topología que tiene por base los abiertos de la figura:



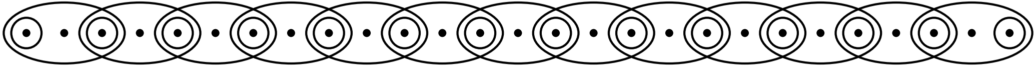
es T_0 (pero no T_1) y es localmente finita.
e) Si $\mathcal{T}$ topología en $\mathbb{Z}$ es localmente finita y T_1 entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

Observación. Dado un espacio topológico localmente finito, para todo punto p existe un abierto mínimo $O(p)$ y un cerrado mínimo $C(p)$ que lo contiene.
Los subconjuntos $O(p)$ forman una base de la topología.

La recta digital

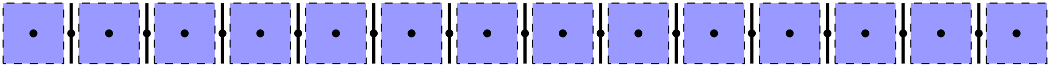
Llamaremos **recta digital** a $\mathbb{Z}$ con la topología cuyos entornos abiertos mínimos son

$$O(m,n)=\begin{cases}\{n\} & \text{si } n \text{ es impar}\\ \{n-1,n,n+1\} & \text{si } n \text{ es par,}\end{cases}$$



Es una topología T_0 (no T_1) localmente finita, en la que los puntos impares son abiertos y los pares cerrados.

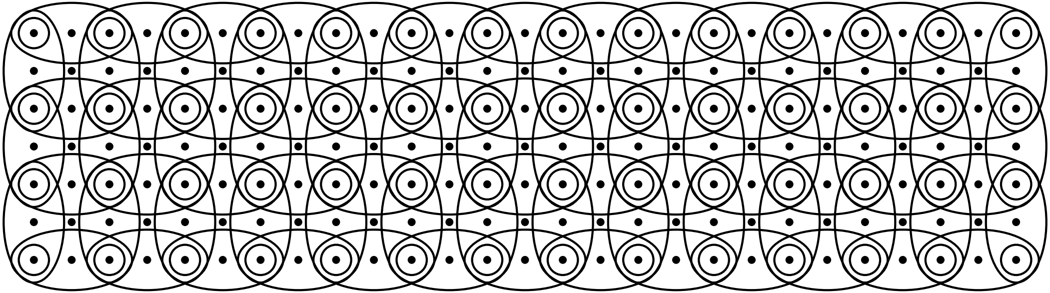
Es un modelo para la recta digital si identificamos los números impares (que son abiertos) con los pixels y los pares como las fronteras entre ellos. Es decir, consideramos la recta digital como un subconjunto de pixels abiertos (correspondientes con los enteros impares) junto con un subconjunto de fronteras cerradas (correspondientes a los enteros pares).



El plano digital

Llamaremos **plano digital** a $\mathbb{Z}^2$ con la topología cuyos entornos abiertos mínimos son

$$O(n) = \begin{cases} \{(m,n)\} & \text{si } m,n \text{ son impares} \\ \{(m-1,n),(m,n),(m+1,n)\} & \text{si } m \text{ par, } n \text{ impar} \\ \{(m,n-1),(m,n),(m,n+1)\} & \text{si } m \text{ impar, } n \text{ par} \\ \{(m+a,n+b) \mid a,b=-1,0,1\} & \text{si } m,n \text{ pares,} \end{cases}$$



Es una topología T_0 (no T_1) localmente finita, en la que los puntos con dos coordenadas impares (resp. pares) son abiertos (resp. cerrados).

El plano digital

Es un modelo para el plano digital si identificamos:
-los números de la forma (impar,impar), que son abiertos, con los pixels,
-los de la forma (impar,par) con las fronteras horizontales de los pixels
-los de la forma (par,impar) con las fronteras verticales de los pixels
-los de la forma (par,par) con los puntos frontera de las esquinas.